Ломакин М.И., Бурый А.С., Докукин А.В., Ниязова Ю.М., Стреха А.А. Оценка показателей качества в условиях неполной информации // Информационно-экономические аспекты стандартизации и технического регулирования, 2018. № 4(44).

УДК 519.213:621.3.019.3

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Ломакин М.И., доктор экономических наук, доктор технических наук, профессор, ФГУП «Российский научно-технический центр информации по стандартизации, метрологии и оценке соответствия» (ФГУП «СТАНДАРТИНФОРМ»);
Бурый А.С., доктор экономических наук, ФГУП «Российский научно-технический центр информации по стандартизации, метрологии и оценке соответствия» (ФГУП «СТАНДАРТИНФОРМ»);
Докукин А.В., доктор экономических наук, ФГУП «Российский научно-технический центр информации по стандартизации, метрологии и оценке соответствия» (ФГУП «СТАНДАРТИНФОРМ»);
Ниязова Ю.М., кандидат экономических наук, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет геодезии и картографии»;
Стреха А.А., кандидат экономических наук, ФГУП «Российский научно–технический центр информации по стандартизации, метрологии и оценке соответствия» (ФГУП «СТАНДАРТИНФОРМ»)

Рассматривается задача оценки показателей качества произвольной природы в условиях неполной информации, представленной моментами распределения; предложен численный метод оценки показателей, базирующийся на решении совокупности задач линейного программирования.

Ключевые слова: показатель качества, выборка, функция распределения, гарантированная оценка, моменты.

UDC 519.213:621.3.019.3

EVALUATION OF QUALITY INDICATORS IN THE CONDITIONS OF INCOMPLETE INFORMATION

Lomakin M.I. doctor of economic Sciences, doctor of technical Sciences, Professor, FSUE «Russian research and development information center on standartization, metrology and compliance check» (FSUE «STANDARTINFORM»);
Buryy A.S., doctor of economic Sciences, FSUE «Russian research and development information center on standartization, metrology and compliance check» (FSUE «STANDARTINFORM»);

iea.gostinfo.ru

Dokukin A.V., doctor of economic Sciences, FSUE «Russian research and development information center on standartization, metrology and compliance check» (FSUE «STANDARTINFORM»);
Niyzova J.M. candidate of economic Sciences Moscow state university of geodesy and cartography;
Streha A.A., candidate of economic Sciences, FGUP «Russian research and development information center on standartization, metrology and compliance check» (FSUE «STANDARTINFORM»).

The problem of estimation of indicators of quality of the arbitrary nature in the conditions of incomplete information presented by moments of distribution is considered; the numerical method of estimation of indicators based on the solution of a set of problems of linear programming is offered.

Key words: quality indicator, sampling, distribution function, guaranteed evaluation, moments.

Введение

Во многих случаях для оценки качества технико-экономических и иных процессов используют показатели вида: $P(\xi \geq (<)\tau)$ здесь $P(\ldots)$ - вероятность того, что случайная величина ξ, характеризующая данный иной процесс, не меньше (меньше) заданной величины τ, т.е. показателем качества выступает либо функция распределения, либо дополнительная функция распределения. Такой показатель используется для оценки различных показателей надежности, показателей эффективности выполнения задач (операций), оценки уровней доходности портфелей ценных бумаг (проектов, работ), оценки рисков и др.

В случае, когда нет полной информации о распределении случайной величины ξ, для оценки показателей качества может быть использован метод моментов [1,2], который основан на нахождении моментов распределения по исходным первичным данным о том или ином процессе и дальнейшем нахождении гарантированных (нижних или верхних) оценок показателей качества.

iea.gostinfo.ru

Пусть по результатам обработки первичных данных $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в соответствии с соотношениями:

$$m_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j, \qquad j = \overline{1,k}. \tag{1}$$

получены оценки k моментов.

В последнем соотношении:

m_j - j-ый момент распределения случайной величины ξ,

k – число моментов,

X – выборка значений случайной величины ξ,

X_i – i-е значение в выборке.

Определим множество функций распределения с заданными моментами $m = (m_1, m_2,\ldots,m_k)$ в виде:

$$F_0 = \{ F(t): \int_0^{\infty} t^i dF(t) = m_j; \quad j = \overline{1,k} \}. \tag{2}$$

В работе [3] получен следующий результат.

Наибольшее (наименьшее) значение интеграла

$$J(\tau) = \int_0^{\tau+0} c(t)dF(t) \tag{3}$$

при непрерывной подинтегральной функции c(t), имеющей k+1 неотрицательную производную и $F(t) \in F_0$ достигается на единственном ступенчатом распределении F(t), у которого среди точек роста $t_1, t_2,\ldots,t_v$ имеет точка τ; при нечетном k число точек роста v функции распределения F(t) определяется соотношением $v = (k + 3)/2$, причем $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_v$

iea.gostinfo.ru

$< \infty$; при четном k число точек роста v функции распределения F(t) определяется соотношением $v = k/2 + 1$, причем $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_v < \infty$; числа $p_j > 0$, t_j, $j = 1,2,\ldots,v$ удовлетворяют системе уравнений:

$$m_j = \sum_{i=1}^{v} t_i^j p_i, \qquad j = \overline{0,k}, \quad m_0 = 1. \tag{4}$$

С помощью этого результата в работе [3] найдены гарантированные оценки показателя качества в виде вероятности $P(\xi \geq (<)\tau)$ при двух и трех известных моментах в аналитическом виде.

Однако при числе моментов большем трех гарантированные оценки показателя качества в аналитическом виде не могут быть получены.

Основные результаты

Пусть $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in R^n$ есть выборка значений случайной величины ξ, характеризующей определенный процесс. Составляющие выборки $X_i > 0$ есть независимые одинаково распределенные величины из некоторого неизвестного распределения F(t).

На основе выборки X определим k выборочных моментов распределения F(t) в соответствии с соотношением (1). Определим также множество функций распределения F_0, у которых моменты распределения равны выборочным моментам, полученным на основе выборки X в соответствии с соотношением (2).

Рассмотрим задачи: найти на множестве F_0 нижнюю и верхнюю оценку, границу (далее оценку) функции распределения F(t) для заданного $t = \tau$, т.е. найти такие $F_x(\tau)$ и $F^x(\tau)$, что

iea.gostinfo.ru

$$F_н(\tau) = \min_{F(t)\in F_0} F(\tau); \quad F_в(\tau) = \max_{F(t)\in F_0} F(\tau); \qquad (5)$$

Далее для определенности будем рассматривать вторую задачу, задачу нахождения верхней оценки функции распределения. Верхняя оценка для функции распределения $F(t)$ для заданного $t = \tau$ в соответствии с приведенным выше результатом достигается на дискретном распределении. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_v$ - точки роста функции распределения; $p_1, p_2, \ldots, p_v$ - величины роста (скачка) функции распределения в соответствующих точках. Тогда задачу можно переписать в виде:

$$F_в(\tau) = \max F(\tau) = \sum_{j=1}^{d} p_j \qquad (6)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{v} t_i^j p_i = m_j \;\; j = \overline{0,k}, \;\; m_0 = 1. \qquad (7)$$

В соотношении (6) p_d - величина роста (скачка) функции распределения $F(t)$ в точке $t = \tau$.

Задача, определяемая соотношениями (6) и (7), является задачей нелинейного многомерного программирования. Общих методов решения таких задач не существует. В настоящей статье предложен метод решения конкретной задачи нелинейного многомерного программирования, определяемой соотношениями (6) и (7), основанный на решении последовательности задач линейного программирования.

Зададим некоторое множество точек роста функции распределения $T_s = (t_1, t_2, \ldots, t_{vs})$, например, следующим образом: $t_g = \delta g$. В последнем соотношении индекс g принимает значения 1, 2, …,vs; δ – постоянная величина – шаг

iea.gostinfo.ru

дискретизации. Пусть $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{vs}$ - величины роста (скачка) функции распределения в этих точках, при этом для некоторых точек роста из множества T_s величина роста может быть нулевой.

Рассмотрим задачу: найти верхнюю границу функции распределения

$$F_в(\tau) = \max \sum_{i=1}^{ds} \pi_i \qquad (8)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{vs} t_i^j \pi_i = m_j, \qquad j = \overline{0,k}, \ m_0 = 1. \qquad (9)$$

В соотношении (10) π_{ds} - величина роста функции распределения в точке t_{ds}, причем, $t_{ds} \le \tau \le t_{ds+1}$. Последняя задача, определяемая соотношениями (10) и (11), является задачей линейного программирования и может быть решена с использованием типовых пакетов программ решения задач линейного программирования.

Далее уменьшаем шаг дискретизации, например, путем половинного деления и решаем каждый раз задачу линейного программирования до тех пор пока разница между значением функции распределения $F_в(\tau) \approx F_{в\,h}(t_{ds})$ на предыдущем и последующем $F_в(\tau) \approx F_{в\,h+1}(t_{ds})$ шагах является существенной, т.е. до тех пор пока

$$|F_{в\,h+1}(t_{ds}) - F_{в\,h}(t_{ds})| > \gamma, \qquad (10)$$

где $\gamma > 0$ – малая величина, определяющая точность оценки верхней границы функции распределения,

h, h + 1 - предыдущий и последующий шаг решения задач линейного программирования.

iea.gostinfo.ru

$|F_{в\,h+1}(t_{ds}) - F_{в\,h}(t_{ds})|$ - модуль разности $F_{в\,h+1}(t_{ds}) - F_{в\,h}(t_{ds})$.

Рассмотрим пример использования предложенного метода определения верхней оценки функции распределения при четырех известных моментах m_1, m_2, m_3, m_4. Пусть эти моменты соответственно равны $m_1 = 2{,}85$; $m_2 = 9{,}45$; $m_3 = 34{,}05$; $m_4 = 129{,}45$.

Зададим множество точек роста функции распределения $T_s = (1, 2, 3, 4, 5)$. Здесь $t_g = 1g$. Индекс g принимает значения 1, 2, …,5; δ – постоянная величина – шаг дискретизации равен δ = 1. Пусть $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$ - величины роста (скачка) функции распределения в этих точках.

Необходимо найти верхнюю оценку функции распределения $F(\tau)$ при $\tau = 2$. Точность оценки функции распределения зададим равной $\gamma = 0{,}01$.

Шаг 1.Запишем задачу поиска верхней оценки (границы) функции распределения в развернутом виде: найти

$$F_в(2) = \max(\pi_1 + \pi_2) \tag{11}$$

при условиях:

$$\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4 + 5\pi_5 = 2{,}85, \tag{12}$$

$$\pi_1 + 4\pi_2 + 9\pi_3 + 16\pi_4 + 25\pi_5 = 9{,}45, \tag{13}$$

$$\pi_1 + 8\pi_2 + 27\pi_3 + 64\pi_4 + 125\pi_5 = 34{,}05, \tag{14}$$

$$\pi_1 + 16\pi_2 + 81\pi_3 + 256\pi_4 + 625\pi_5 = 129{,}45. \tag{15}$$

С помощью Excel Microsoft пункт «Поиск решения» решаем эту задачу линейного программирования, получаем $F_в(2) = 0{,}300$.

iea.gostinfo.ru

Шаг 2. В развернутом виде задачу поиска верхней оценки функции распределения здесь не приводим в силу ее громоздкости, она определяется соотношениями, аналогичными соотношениям (11) – (15).

Уменьшаем шаг дискретизации δ = 0,5. Множество точек роста функции распределения T_s = (0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5).

С помощью Excel Microsoft пункт «Поиск решения» решаем эту задачу линейного программирования, получаем $F_в(2) = 0{,}475$.

Шаг 3. Уменьшаем шаг дискретизации δ = 0,25. Множество точек роста функции распределения T_s = (0,25; 0,5; …, 4,75; 5).

С помощью Excel Microsoft пункт «Поиск решения» решаем эту задачу линейного программирования, получаем $F_в(2) = 0{,}514$.

Шаг 4. Уменьшаем шаг дискретизации δ = 0,125. Множество точек роста функции распределения: T_s = (0,125; 0,25; …, 4,875; 5).

С помощью Excel Microsoft пункт «Поиск решения» решаем эту задачу линейного программирования, получаем $F_в(2) = 0{,}528$.

Шаг 5. Уменьшаем шаг дискретизации δ = 0,0625. Множество точек роста функции распределения: T_s = (0,0625; 0,125; …, 4,9375; 5).

С помощью Excel Microsoft пункт «Поиск решения» решаем эту задачу линейного программирования, получаем $F_в(2) = 0{,}534$.

Для этого шага находим γ = 0,006. На этом решение задачи завершаем. Для получения более высокой точности оценки можно далее уменьшать шаг дискретизации.

Заключение

В настоящей статье предложен метод определения показателей качества в условиях неполной информации, который основан на численном решении последовательности задач линейного программирования; выполнена практическая его апробация для нахождения верхней оценки функции распределения при четырех известных моментах; верхняя оценка функции

iea.gostinfo.ru

распределения найдена с требуемой точностью при численном решении пяти задач линейного программирования.

Список использованных источников и литературы:

1. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 551 с.
2. Гермейер Ю.Б., Иргер Д.С., Калабухова Е.П. О гарантированных оценках надежности системы при неполных сведениях о надежности элементов// ЖВМ и МФ.1966.Т.6, №4.С.733-747.
3. Ломакин М.И. Гарантированные оценки вероятности безотказной работы в классе распределений с фиксированными моментами// Известия АН СССР, Автоматика и телемеханика, 1991, №1. С.154-161.

© Ломакин М.И.
© Бурый А.С.
© Докукин А.В.
© Ниязова Ю.М.
© Стреха А.А.

iea.gostinfo.ru